

Алгебра и анализ  
Том 24 (2012), №1

## О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКУ

© Е. А. СЕВОСТЬЯНОВ

Для семейств  $\mathfrak{F}$  отображений  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ ,  $n \geq 2$ , области  $D \subset \mathbb{R}^n$ , более общих, чем отображения с ограниченным искажением, установлено свойство равностепенной непрерывности при условии, что расходится некоторый интеграл  $\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty$ , влияющий на поведение каждого отображения  $f \in \mathfrak{F}$ , где  $\Phi$  — некоторая специальная функция, а  $\delta_0 > 0$  — фиксированное число. При аналогичных условиях получены результаты об устранении изолированных особенностей для  $f$ , кроме того, получены аналоги хорошо известных теорем Сохоцкого–Вейерштрасса и Лиувилля.

### §1. Введение

Всюду далее  $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$ ,  $\mathbb{B}^n := B(0, 1)$ ,  $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$ ,  $\mathbb{S}^{n-1} := S(0, 1)$ ,  $\Omega_n$  означает объем единичного шара  $\mathbb{B}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\omega_{n-1}$  означает площадь сферы  $\mathbb{S}^{n-1}$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $D$  — область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $m$  — мера Лебега  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{dist}(A, B)$  — евклидово расстояние между множествами  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $|A|$  означает линейную меру множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  всюду, где недоразумение невозможно. Запись  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  предполагает, что отображение  $f$ , заданное в области  $D$ , непрерывно. Как обычно, мы пишем  $f \in W_{\text{loc}}^{1,n}(D)$ , если все координатные функции  $f = (f_1, \dots, f_n)$  обладают обобщенными частными производными первого порядка, которые локально интегрируемы в  $D$  в степени  $n$ . Отображение  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется *дискретным*, если прообраз  $f^{-1}(y)$  каждой точки  $y \in \mathbb{R}^n$  состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества  $U \subset D$  является открытым множеством в  $\mathbb{R}^n$ .

---

*Ключевые слова:* пространственные отображения, вмести́мость, интегральные ограничения.

В теории пространственных отображений определенное место занимают условия вида

$$\int_D \Phi(Q(x)) \, dm(x) < \infty, \quad (1)$$

где  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  и  $Q : D \rightarrow [0, \infty]$  — некоторые фиксированные измеримые функции. Отметим, что соотношения типа (1) могут возникать в связи с рассмотрением самых различных задач, см., например, источники [1, 2, 6, 8, 13, 14, 18, 20] и [24] по этому поводу. В настоящей работе будут рассматриваться пространственные отображения, которые изучаются в контексте их взаимосвязи с соотношениями вида (1).

Дадим, прежде всего, несколько определений. Здесь и далее *кривой*  $\gamma$  мы называем непрерывное отображение отрезка  $[a, b]$  (либо открытого интервала  $(a, b)$ ) в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Под семейством кривых  $\Gamma$  подразумевается некоторый фиксированный набор кривых  $\gamma$ , а  $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ . Следующие определения могут быть найдены, например, в [22, §1–6 гл. I]. Борелева функция  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  называется *допустимой* для семейства  $\Gamma$  кривых  $\gamma$  в  $\mathbb{R}^n$ , если криволинейный интеграл первого рода  $\int_\gamma \rho(x) \, |dx| \geq 1$  для всех кривых  $\gamma \in \Gamma$ . В этом случае мы пишем:  $\rho \in \text{adm } \Gamma$ . *Модулем* семейства кривых  $\Gamma$  называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \rho^n(x) \, dm(x). \quad (2)$$

Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега  $m$  в  $\mathbb{R}^n$ . Именно, модуль пустого семейства кривых равен нулю,  $M(\emptyset) = 0$ , модуль обладает свойством монотонности относительно семейств кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2 : \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$ , а также свойством полуаддитивности:  $M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i)$  (см. [22, теорема 6.2]). Напомним, что отображение  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполнены следующие условия: 1)  $f \in W_{\text{loc}}^{1,n}$ , 2) якобиан  $J(x, f)$  отображения  $f$  в точке  $x \in D$  сохраняет знак почти всюду в  $D$ , 3)  $\|f'(x)\|^n \leq K \cdot |J(x, f)|$  при почти всех  $x \in D$  и некоторой постоянной  $K < \infty$ , где, как обычно,  $\|f'(x)\| := \sup_{h \in \mathbb{R}^n: |h|=1} |f'(x)h|$  (см., например, [16, §3, гл. I] либо [17, определение 2.1, §2, гл. I]). В контексте исследований, проводимых в настоящей работе, немаловажно подчеркнуть, что каждое отображение с ограниченным искажением удовлетворяет неравенству Е. А. Полецкого (см. [15, теорема 1, §4]), а именно, если  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  —

отображение с ограниченным искажением, то

$$M(f(\Gamma)) \leq K' \cdot M(\Gamma) \quad (3)$$

для произвольного семейства  $\Gamma$  кривых  $\gamma$  в области  $D$ , где  $M$  — конформный модуль семейства кривых, введенный выше (т.е. некоторая внешняя мера, определенная на семействах кривых в  $\mathbb{R}^n$ ), а  $K' < \infty$  — некоторая постоянная (см. также [17, теорема 8.1, §8, гл. II]). Гомеоморфизм  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , либо  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ ,  $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ , в зависимости от контекста, будем называть  $K'$  — *квазиконформным отображением* в области  $D$ , если  $f$  удовлетворяет соотношению вида (3) для произвольного семейства  $\Gamma$  кривых  $\gamma$  (см., например, [22, §13, гл. II, теорема 34.3, гл. IV]).

В настоящей статье мы исследуем отображения  $f$ , более общие, чем отображения с ограниченным искажением. Точнее, для заданной измеримой по Лебегу функции  $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ , определенной в области  $D$  в  $\mathbb{R}^n$  и принимающей вещественные значения, мы предполагаем вместо (3) выполнение неравенства вида

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|) dm(x), \quad (4)$$

где

$$A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\} \quad (5)$$

означает сферическое кольцо, центрированное в точке  $x_0$  и радиусов:  $r_1, r_2$ ,  $S_i = S(x_0, r_i)$  означает сферу с центром в точке  $x_0$  радиусов  $r_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\Gamma(S_1, S_2, A)$  обозначает семейство всех кривых, соединяющих  $S_1$  и  $S_2$  внутри области  $A$ , а вещественнозначная функция  $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$  в неравенстве (4) предполагается произвольной измеримой и такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \quad (6)$$

В связи с изучением неравенств вида (4) см., например, работы [3, 10, 11, 12] и [20]. Заметим, что при  $Q(x) \leq K$  п.в. в правой части неравенства (4) возникнет выражение вида  $K \cdot M(\Gamma(S_1, S_2, A))$ , см. неравенства (4) и (3). Отсюда заключаем, что произвольное отображение с ограниченным искажением всегда удовлетворяет неравенству вида (4) с постоянным значением  $Q$ . Правая часть неравенства (4) в общем случае, когда функция  $Q(x)$  просто измерима, представляет собой как бы модуль  $M$  семейства кривых  $\Gamma(S_1, S_2, A)$  с весом  $Q(x)$ . Случай, когда функция  $Q$  в (4) неограничена, преимущественно и будет рассмотрен в настоящей работе. Предположим, что открытое дискретное отображение  $f$  удовлетворяет

неравенству вида (4) и что для функции  $Q(x)$  выполнено условие вида (1), где  $\Phi$  — некоторая функция такая, что

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \quad (7)$$

при некотором  $\delta_0 > 0$ . В настоящей работе будут показаны возможность продолжения отображения  $f$  в изолированную точку границы области  $D$  по непрерывности, а также равностепенная непрерывность семейств таких отображений при условии, что  $f$  удовлетворяет неравенству (4), где функция  $Q(x)$ , в свою очередь, удовлетворяет неравенству (1), а функция  $\Phi$  в (1) такова, что выполнено соотношение (7). При этом нами также будет показано, что упомянутое выше условие на функцию  $\Phi$ , а именно соотношение (7), является не только достаточным, но также и необходимым в некотором смысле. Отображение  $f$  будет предполагаться здесь открытым и дискретным, функция  $Q$  просто измеримой, а функция  $\Phi$  неубывающей и выпуклой.

Говорят, что отображение  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  является *кольцевым  $Q$ -отображением в точке  $x_0 \in D$* , если  $f$  удовлетворяет (4) для любого кольца  $A = A(r_1, r_2, x_0)$ ,  $0 < r_1 < r_2 < r_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$ , и для каждой измеримой функции  $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ , удовлетворяющей (6). Если  $f$  в соотношении (4) предполагается гомеоморфизмом, отображение  $f$  будем называть *кольцевым  $Q$ -гомеоморфизмом в точке  $x_0 \in D$* . Наконец,  $f$  будем называть просто *кольцевым  $Q$ -отображением* (соответственно *кольцевым  $Q$ -гомеоморфизмом*), если соотношения вида (4) выполнены в каждой точке  $x_0 \in D$ . Аналогично при изучении вопросов, связанных с граничным поведением отображений, может быть дано понятие *кольцевого  $Q$ -отображения  $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$* , определенного априори в окрестности изолированной точки  $x_0$  границы области  $D \setminus \{x_0\}$ .

Пусть  $E$  — компактное множество в  $\overline{\mathbb{R}^n}$ , такое что его конформная емкость положительна,  $\text{cap } E > 0$ . Предположим, что заданы функция  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ , измеримая по Лебегу функция  $Q : D \rightarrow [0, \infty]$  и число  $M > 0$ . Обозначим через  $\mathfrak{R}_{M,E}^{\Phi,Q}$  семейство всех открытых дискретных кольцевых  $Q$ -отображений  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$  таких, что

$$\int_D \Phi(Q(x)) \frac{dm(x)}{(1 + |x|^2)^n} \leq M. \quad (8)$$

Иногда может быть использовано обозначение  $\mathfrak{R}_{M,E}^{\Phi,Q}(D)$ , чтобы явно указать на область  $D$ . Основные результаты настоящей работы содержат в себе следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  — неубывающая выпуклая функция. Если для некоторого  $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$  выполнено соотношение вида (7), то класс  $\mathfrak{R}_{M,E}^{\Phi,Q}$  является равностепенно непрерывным и, следовательно, образует нормальное семейство отображений при всех  $M \in (0, \infty)$ .

Для измеримой по Лебегу функции  $Q : D \rightarrow [0, \infty]$  и компактного множества  $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ ,  $\text{cap } E > 0$ , обозначим через  $K_{M,E}^{\Phi,Q}(D \setminus \{x_0\})$  семейство всех открытых дискретных кольцевых  $Q$ -отображений в точке  $x_0$  вида  $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ , таких что выполнено соотношение (8).

**Теорема 2.** Пусть  $Q(x) \geq 1$  почти всюду и  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  — неубывающая выпуклая функция,  $x_0 \in D$ . Если для некоторого  $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$  выполнено соотношение вида (7), то произвольное отображение  $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ ,  $f \in K_{M,E}^{\Phi,Q}(D \setminus \{x_0\})$ , продолжается по непрерывности в точку  $x_0 \in D$  до открытого дискретного отображения  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  — неубывающая выпуклая функция. Предположим, что для всех множеств  $E$ , имеющих положительную емкость, всех чисел  $M > 0$  и всех измеримых функций  $Q : D \rightarrow [0, \infty]$  класс отображений  $\mathfrak{R}_{M,E}^{\Phi,Q}$  является равностепенно непрерывным (нормальным). Тогда для всех  $\delta_* \in (\tau_0, \infty)$ ,  $\tau_0 := \Phi(0)$ , выполнено условие

$$\int_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty. \quad (9)$$

**Теорема 4.** Пусть  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  — неубывающая выпуклая функция. Предположим, для всех множеств  $E$ , имеющих положительную емкость, всех чисел  $M > 0$  и всех измеримых функций  $Q : D \rightarrow [0, \infty]$  произвольное отображение  $f \in K_{M,E}^{\Phi,Q}(D \setminus \{x_0\})$  вида  $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ ,  $x_0 \in D$ , устранимо по непрерывности в точку  $x_0$ . Тогда для всех  $\delta_* \in (\tau_0, \infty)$ ,  $\tau_0 := \Phi(0)$ , выполнено условие (9).

**Замечание 1.** Заметим, что условие  $\int_D \Phi(Q(x)) dm(x) \leq M$  влечет соотношение (8). Следовательно, (8) является более общим, а соответствующий класс кольцевых  $Q$ -отображений представляет собой подкласс семейства  $\mathfrak{R}_{M,E}^{\Phi,Q}$ . С другой стороны, если область  $D$  ограничена, то условие (8) влечет условие  $\int_D \Phi(Q(x)) dm(x) \leq M_*$ , где  $M_* = M \cdot (1 + \delta_*^2)^n$ ,  $\delta_* = \sup_{x \in D} |x|$ .

Основные определения и обозначения, использованные выше, четко будут приведены в следующем параграфе.

## §2. Предварительные сведения

Конденсатором в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , называем пару  $E = (A, C)$ , где  $A$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ , а  $C$  — компактное подмножество  $A$ . Отображение  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется абсолютно непрерывным на линиях,  $f \in ACL$ , если в любом  $n$ -мерном параллелепипеде  $P$  с ребрами параллельными осям координат,  $\overline{P} \subset D$ , все координатные функции  $f = (f_1, \dots, f_n)$  абсолютно непрерывны на почти всех прямых, параллельных осям координат. Конформной емкостью (либо просто емкостью) конденсатора  $E$  называется величина

$$\text{cap } E = \text{cap } (A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^n \, dm(x),$$

где  $W_0(E) = W_0(A, C)$  — семейство неотрицательных непрерывных функций  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  с компактным носителем в  $A$ , таких что  $u(x) \geq 1$  при  $x \in C$  и  $u \in ACL$ . Говорят, что компакт  $C$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , имеет нулевую емкость, пишут  $\text{cap } C = 0$ , если  $\text{cap } (A, C) = 0$  хотя бы для одного ограниченного открытого множества  $A$ , содержащего  $C$ . В противном случае полагают  $\text{cap } C > 0$ .

Множества емкости нуль, как известно, всюду разрывны, см., например, следствие 2.5 гл. III в [17], иначе говоря, условие  $\text{cap } C = 0$ , в частности, влечет, что  $\text{Int } C = \emptyset$ . Говорят, что произвольное множество  $A$  в  $\mathbb{R}^n$  имеет емкость нуль, если произвольное его компактное подмножество имеет емкость нуль. Аналогично можно определить понятие конденсатора и множества емкости нуль в  $\overline{\mathbb{R}^n}$  (см., например, [17]).

Пусть  $(X, d)$  и  $(X', d')$  — метрические пространства с расстояниями  $d$  и  $d'$  соответственно. Семейство  $\mathfrak{F}$  непрерывных отображений  $f : X \rightarrow X'$  называется нормальным, если из любой последовательности отображений  $f_m \in \mathfrak{F}$  можно выделить подпоследовательность  $f_{m_k}$ , которая сходится локально равномерно в  $X$  к непрерывной функции  $f : X \rightarrow X'$ . Введенное понятие очень тесно связано со следующим. Семейство  $\mathfrak{F}$  отображений  $f : X \rightarrow X'$  называется равномерно непрерывным в точке  $x_0 \in X$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что  $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  для всех  $x$  с  $d(x, x_0) < \delta$  и для всех  $f \in \mathfrak{F}$ . Говорят, что  $\mathfrak{F}$  равномерно непрерывно, если  $\mathfrak{F}$  равномерно непрерывно в каждой точке из  $X$ . Если  $(X, d)$  — сепарабельное метрическое пространство, а  $(X', d')$  — компактное метрическое пространство, то семейство  $\mathfrak{F}$  отображений  $f : X \rightarrow X'$  нормально тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{F}$  равномерно непрерывно. Это версия хорошо известной теоремы Арцела–Асколи (см., например, [22, §20.4]).

Напомним, что изолированная точка  $x_0$  границы  $\partial D$  области  $D$  называется *устранимой* для отображения  $f$ , если существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Изолированная точка  $x_0$  границы  $\partial D$  называется *существенной особой точкой* отображения  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , если при  $x \rightarrow x_0$  нет ни конечного, ни бесконечного предела.

Предположим, отображение  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , имеет частные производные при почти всех  $x \in D$ . Тогда *внутренней дилатацией* отображения  $f$  в точке  $x \in D$  называется величина

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^n},$$

если  $J(x, f) \neq 0$ ,  $K_I(x, f) = 1$ , если  $f'(x) = 0$ , и  $K_I(x, f) = \infty$  — в остальных точках, где  $l(f'(x)) = \inf_{h \in \mathbb{R}^n: |h|=1} |f'(x)h|$ . В дальнейшем нам понадобится следующее

**Предложение 1.** *Произвольный гомеоморфизм  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ ,  $f \in W_{\text{loc}}^{1,n}$ , при  $K_I(x, f) \in L_{\text{loc}}^1$  является кольцевым  $Q$ -гомеоморфизмом в каждой точке  $x_0 \in D$  при  $Q = K_I(x, f)$ , см., например, [11, теоремы 8.1 и 8.6]. Более того,  $f$  будет кольцевым  $Q$ -отображением в произвольной изолированной точке границы  $D$ , см. там же.*

При вычислении внутренних дилатаций в некоторых отдельных случаях удобно использовать величины, введенные нами ниже. Предположим, что отображение  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  дифференцируемо в точке  $x_0 \in D$  и матрица Якоби  $f'(x_0)$  невырождена,  $J(x_0, f) = \det f'(x_0) \neq 0$ . Тогда найдутся системы векторов  $e_1, \dots, e_n$  и  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$  и положительные числа  $\lambda_1(x_0), \dots, \lambda_n(x_0)$ ,  $\lambda_1(x_0) \leq \dots \leq \lambda_n(x_0)$  такие, что  $f'(x_0)e_i = \lambda_i(x_0)\tilde{e}_i$ , см. теорему 2.1 гл. I в [16], при этом  $\lambda_1^2(x_0), \dots, \lambda_n^2(x_0)$  являются собственными значениями симметрического отображения  $(f'(x_0))^* f'(x_0)$ , см. теорему 2.2 гл. I в [16],

$$|J(x_0, f)| = \lambda_1(x_0) \dots \lambda_n(x_0), \quad \|f'(x_0)\| = \lambda_n(x_0), \quad l(f'(x_0)) = \lambda_1(x_0),$$

$$K_I(x_0, f) = \frac{\lambda_1(x_0) \dots \lambda_n(x_0)}{\lambda_1^n(x_0)}, \quad (10)$$

см. соотношение (2.5) и дополнительные комментарии на с. 21 §2.1 гл. I в [16]. Числа  $\lambda_1(x_0), \dots, \lambda_n(x_0)$ , упомянутые выше, называются *главными значениями*, а векторы  $e_1, \dots, e_n$  и  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$  — *главными векторами* отображения  $f'(x_0)$ , по этому поводу см. соответствующий комментарий в §2.1 гл. I в [16] после доказательства теоремы 2.2 там же. Разумеется, главные векторы и главные значения зависят как от точки  $x_0$ , так и от

отображения  $f$ , однако с целью упрощения записи мы здесь и в дальнейшем опускаем „ $(x_0)$ “, если недоразумение невозможно.

Напомним, что *сферическая (хордальная) метрика*  $h(x, y)$  равна  $|\pi(x) - \pi(y)|$ , где  $\pi$  — стереографическая проекция  $\mathbb{R}^n$  на сферу  $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , т.е. в явном виде

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2} \sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Пусть  $Q : D \rightarrow [0, \infty]$  — измеримая по Лебегу функция, тогда  $q_{x_0}(r)$  означает среднее интегральное значение  $Q(x)$  над сферой  $|x - x_0| = r$ ,

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{|x-x_0|=r} Q(x) dS, \quad (11)$$

где  $dS$  — элемент площади поверхности  $S$ . Ниже мы придерживаемся следующих стандартных соглашений:  $a/\infty = 0$  для  $a \neq \infty$ ,  $a/0 = \infty$  для  $a > 0$  и  $0 \cdot \infty = 0$ .

Следующие результаты сформулированы и доказаны в работе [25].

**Предложение 2.** Пусть  $Q : \mathbb{B}^n \rightarrow [1, \infty]$  — измеримая по Лебегу функция,  $f : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ ,  $n \geq 2$ , — открытое дискретное кольцевое  $Q$ -отображение в точке  $x_0 = 0$ , удовлетворяющее условию  $\text{cap}(\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})) > 0$ . Предположим, что существует  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\varepsilon_0 < 1$  такое, что

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty. \quad (12)$$

Тогда  $f$  имеет непрерывное продолжение  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  в  $\mathbb{B}^n$ . Непрерывность понимается в смысле пространства  $\overline{\mathbb{R}^n}$  относительно хордальной метрики  $h$ . Более того, продолженное отображение  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  является открытым и дискретным, см. теорему 6 в [25].

Здесь и ниже равностепенная непрерывность, нормальность и т.д. понимаются относительно сферической (хордальной) метрики  $h$ .

**Предложение 3.** Пусть  $x_0 \in D$ ,  $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  — компактное множество положительной емкости,  $\mathfrak{F}_Q$  — семейство открытых дискретных кольцевых  $Q$ -отображений  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$  в точке  $x_0$ . Предположим, что найдется число  $\varepsilon_0 < \text{dist}(x_0, \partial D)$  такое, что выполнено условие (12). Тогда семейство  $\mathfrak{F}_Q$  равностепенно непрерывно, а следовательно, и нормально в точке  $x_0$ .



Напомним, что функция  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  называется *выпуклой*, если

$$\Phi(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda \Phi(t_1) + (1 - \lambda) \Phi(t_2)$$

при всех  $t_1, t_2 \in [0, \infty]$  и  $\lambda \in [0, 1]$ . Обратная функция  $\Phi^{-1}$  может быть корректно определена для любой неубывающей функции  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ :

$$\Phi^{-1}(\tau) = \inf_{\Phi(t) \geq \tau} t. \quad (13)$$

Как обычно,  $\inf$  в (13) равен  $\infty$ , если множество  $t \in [0, \infty]$  таких, что  $\Phi(t) \geq \tau$ , пусто. Заметим, что функция  $\Phi^{-1}$  также является неубывающей.

**Замечание 2.** Из определения очевидно, что

$$\Phi^{-1}(\Phi(t)) \leq t \quad \forall t \in [0, \infty] \quad (14)$$

с равенством в (14), исключая интервалы постоянства функции  $\Phi(t)$ .

Следующее утверждение см., например, [19, теорема 2.1]. Здесь, в (15) и (16), мы дополняем определения интегралов символом  $\infty$  при  $\Phi_p(t) = \infty$  соответственно, если при некотором  $T \in \mathbb{R}$ ,  $H_p(t) = \infty$  для всех  $t \geq T \in [0, \infty)$ . Интеграл в (16) понимается в смысле Лебега–Стилтьеса, а интегралы в (15) и (17)–(20) — как обычные интегралы Лебега.

**Предложение 4.** Пусть  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  — неубывающая функция. Полагаем  $H_p(t) = \log \Phi_p(t)$ ,  $\Phi_p(t) = \Phi(t^p)$ ,  $p \in (0, \infty)$ . Тогда равенство

$$\int_{\delta}^{\infty} H_p'(t) \frac{dt}{t} = \infty \quad (15)$$

влечет

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{dH_p(t)}{t} = \infty, \quad (16)$$

(16) эквивалентно соотношению

$$\int_{\delta}^{\infty} H_p(t) \frac{dt}{t^2} = \infty \quad (17)$$

для некоторого  $\delta > 0$ , а (17) эквивалентно каждому из равенств

$$\int_0^{\Delta} H_p\left(\frac{1}{t}\right) dt = \infty \quad (18)$$

при некотором  $\Delta > 0$ ,

$$\int_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)} = \infty \quad (19)$$

при некотором  $\delta_* > H(+0)$ ,

$$\int_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} = \infty \quad (20)$$

при некотором  $\delta_* > \Phi(+0)$ .

Более того, (15) эквивалентно соотношению (16) и, следовательно, (15)–(20) эквивалентны друг другу при дополнительном условии, что  $\Phi$  абсолютно непрерывна. В частности, все условия (15)–(20) эквивалентны друг другу при условии, что функция  $\Phi$  является выпуклой и неубывающей.

Легко видеть, что условия (15)–(20) являются более слабыми при больших  $p$ , см., например, (17). Необходимо дать еще одно пояснение. В правых частях условий (15)–(20) подразумевается символ  $+\infty$ . При  $\Phi_p(t) = 0$  для  $t \in [0, t_*]$ ,  $H_p(t) = -\infty$  для  $t \in [0, t_*]$ , и мы полагаем  $H_p'(t) := 0$  для  $t \in [0, t_*]$ . Заметим, что условия (16) и (17) исключают случай, когда  $t_*$  принадлежит интервалу интегрирования в указанных выше соотношениях. В противном случае, левые части в (16) и (17) либо одновременно равны  $-\infty$ , либо не определены. Следовательно, мы можем предполагать в (15)–(17), что  $\delta > t_0$  и соответственно  $\Delta < 1/t_0$ , где  $t_0 := \sup_{\Phi_p(t)=0} t$ ,  $t_0 = 0$ , если  $\Phi_p(0) > 0$ .

### §3. Основная лемма

Следующее утверждение является обобщением и усилением леммы 3.1 из [19].

**Лемма 1.** Пусть  $Q : \mathbb{B}^n \rightarrow [0, \infty]$  — измеримая функция и  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow (0, \infty]$  — неубывающая выпуклая функция. Тогда

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dr}{r q_0^{\frac{1}{p}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}}} \quad \forall p \in (0, \infty), \quad \varepsilon \in (0, 1), \quad (21)$$

где  $q_0(r)$  определено соотношением (11) при  $x_0 = 0$ , а

$$M(\varepsilon) = \frac{1}{\Omega_n(1 - \varepsilon^n)} \int_{A(\varepsilon, 1, 0)} \Phi(Q(x)) \, dm(x) \quad (22)$$

— среднее интегральное значение функции  $\Phi \circ Q$  в кольце  $A(\varepsilon, 1, 0)$ , определенном в соотношении (5) при  $x_0 = 0$ ,  $r_1 = \varepsilon$  и  $r_2 = 1$ .

**Замечание 3.** Отметим, что при каждом  $p \in (0, \infty)$  соотношение (21) эквивалентно неравенству

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dr}{r q_0^{\frac{1}{p}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)}, \quad \Phi_p(t) := \Phi(t^p). \quad (23)$$

**Доказательство леммы 1.**

**1 шаг.** Обозначим

$$t_* = \sup_{\Phi_p(t) = \tau_0} t, \quad \tau_0 = \Phi(0) > 0. \quad (24)$$

Полагая  $H_p(t) := \log \Phi_p(t)$ , мы видим, что

$$H_p^{-1}(\eta) = \Phi_p^{-1}(e^\eta), \quad \Phi_p^{-1}(\tau) = H_p^{-1}(\log \tau). \quad (25)$$

Следовательно, учитывая замечание 2 и обозначая

$$h(r) := r^n \Phi(q_0(r)) = r^n \Phi_p\left(q_0^{\frac{1}{p}}(r)\right), \quad R_* = \{r \in (\varepsilon, 1) : q_0^{\frac{1}{p}}(r) > t_*\},$$

мы получаем, что

$$q_0^{\frac{1}{p}}(r) = H_p^{-1}\left(\log \frac{h(r)}{r^n}\right) = H_p^{-1}\left(n \log \frac{1}{r} + \log h(r)\right) \quad \forall r \in R_*.$$

Тогда также

$$q_0^{\frac{1}{p}}(e^{-s}) = H_p^{-1}(ns + \log h(e^{-s})) \quad \forall s \in S_*, \quad (26)$$

где

$$S_* = \left\{s \in \left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) : q_0^{\frac{1}{p}}(e^{-s}) > t_*\right\}. \quad (27)$$

**2 шаг.** В силу неравенства Иенсена и выпуклости функции  $\Phi$  мы имеем, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\log \frac{1}{\varepsilon}} h(e^{-s}) ds &= \int_{\varepsilon}^1 h(r) \frac{dr}{r} = \int_{\varepsilon}^1 \Phi(q_0(r)) r^{n-1} dr \\ &\leq \int_{\varepsilon}^1 \left( \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S(0,r)} \Phi(Q(x)) dS \right) r^{n-1} dr \leq \frac{\Omega_n}{\omega_{n-1}} \cdot M(\varepsilon) = \frac{1}{n} \cdot M(\varepsilon), \end{aligned} \quad (28)$$

где  $M(\varepsilon)$  определено соотношением (22), а  $dS$ , как и раньше, обозначает элемент площади поверхности, по которой ведется интегрирование. Тогда из соотношения (28) вытекает, что линейная мера Лебега  $|T|$  множества  $T = \{ s \in (0, \log \frac{1}{\varepsilon}) : h(e^{-s}) > M(\varepsilon) \}$  удовлетворяет условию

$$|T| = \int_T ds \leq \frac{1}{n}. \quad (29)$$

**3 шаг.** Покажем, что

$$q_0^{\frac{1}{p}}(e^{-s}) \leq H_p^{-1}(ns + \log M(\varepsilon)) \quad \forall s \in \left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus T_*, \quad (30)$$

где  $T_* := T \cap S_*$ , а множество  $S_*$  определено в соотношении (27). Заметим, что

$$\begin{aligned} \left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus T_* &= \left[\left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus S_*\right] \cup \left[\left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus T\right] \\ &= \left[\left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus S_*\right] \cup [S_* \setminus T]. \end{aligned}$$

Заметим также, что неравенство (30) имеет место для  $s \in S_* \setminus T$  ввиду (26) и неубывания функции  $H_p^{-1}$ . Заметим также, см. (24), что при некотором достаточно малом  $\varepsilon_1 > 0$

$$e^{ns} M(\varepsilon) > \Phi(0) + \varepsilon_1 = \tau_0 + \varepsilon_1 \quad \forall s \in \left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (31)$$

а тогда по (25) и (31) ввиду строгого возрастания функции  $H_p^{-1}(\eta)$  при  $\eta > \tau_0$  получим

$$t_* < \Phi_p^{-1}(e^{ns} M(\varepsilon)) = H_p^{-1}(ns + \log M(\varepsilon)) \quad \forall s \in \left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (32)$$

Из соотношения (32) следует, что (30) имеет место также и для  $s \in (0, \log \frac{1}{\varepsilon}) \setminus S_*$ , а тем самым и для всех  $s \in (0, \log \frac{1}{\varepsilon}) \setminus T_*$ .

**4 шаг.** Поскольку функция  $H_p^{-1}$  не убывает, ввиду (29) и (30) получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dr}{r q_0^{\frac{1}{p}}(r)} &= \int_0^{\log \frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{q_0^{\frac{1}{p}}(e^{-s})} \geq \int_{(0, \log \frac{1}{\varepsilon}) \setminus T_*} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns + \log M(\varepsilon))} \\ &\geq \int_{|T_*|}^{\log \frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns + \log M(\varepsilon))} \geq \int_{\frac{1}{n}}^{\log \frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns + \log M(\varepsilon))} \quad (33) \\ &= \frac{1}{n} \int_{1 + \log M(\varepsilon)}^{n \log \frac{1}{\varepsilon} + \log M(\varepsilon)} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)}. \end{aligned}$$

Заметим, что  $1 + \log M(\varepsilon) = \log eM(\varepsilon)$ . Таким образом, из (33) имеем

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dr}{r q_0^{\frac{1}{p}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{\log eM(\varepsilon)}^{\log \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)}, \text{ и после замены переменной } \eta = \log \tau, \text{ с учетом}$$

соотношений в (25), получаем неравенство (23), а следовательно, и (21).  $\square$

**Теорема 5.** Пусть  $Q : \mathbb{B}^n \rightarrow [0, \infty]$  — измеримая по Лебегу функция такая, что

$$\int_{\mathbb{B}^n} \Phi(Q(x)) \, dm(x) < \infty, \quad (34)$$

где  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  — неубывающая выпуклая функция, для которой

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}}} = \infty, \quad p \in (0, \infty), \quad (35)$$

при некотором  $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$ . Тогда

$$\int_0^1 \frac{dr}{r q_0^{\frac{1}{p}}(r)} = \infty. \quad (36)$$

**Замечание 4.** Заметим, что в теореме 5 мы предполагаем более общий случай относительно функции  $\Phi$ , а именно когда  $\Phi$  может принимать также и значение 0. Действительно, указанный выше случай сводится к

ситуации  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow (0, \infty]$  при помощи рассмотрения вспомогательной функции

$$\Phi_*(t) = \begin{cases} \Phi(t), & \Phi(t) > \delta, \\ \delta, & \Phi(t) \leq \delta, \end{cases}$$

где  $\delta$  — произвольное число,  $\delta \in (0, \delta_0)$ . Заметим, что функция  $\Phi_*(t)$  по-прежнему удовлетворяет соотношениям (34) и (35).

**Замечание 5.** Так как  $[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}} = \Phi_p^{-1}(\tau)$ , где  $\Phi_p(t) = \Phi(t^p)$ , соотношение (35) влечет, что

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} = \infty \quad \forall \delta \in [0, \infty). \quad (37)$$

С другой стороны, соотношение вида (37), выполненное при некотором  $\delta \in [0, \infty)$ , вообще говоря, не влечет (35).

Более подробно соотношение вида (35), выполненное при некотором  $\delta_0 > \tau_0$ , очевидно, влечет условие (37) для  $\delta \in [0, \delta_0)$ , а для  $\delta \in (\delta_0, \infty)$  имеем, что

$$0 \leq \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} \leq \frac{1}{\Phi_p^{-1}(\delta_0)} \log \frac{\delta}{\delta_0} < \infty, \quad (38)$$

поскольку функция  $\Phi_p^{-1}$  не убывает и  $\Phi_p^{-1}(\delta_0) > 0$ . Следовательно, соотношение вида (37) будет выполнено для всех  $\delta \in [0, \infty)$ .

С другой стороны, по определению обратной функции,  $\Phi_p^{-1}(\tau) \equiv 0$  для всех  $\tau \in [0, \tau_0]$ , где  $\tau_0 = \Phi_p(0)$ , следовательно, условие (37) при  $\delta \in [0, \tau_0)$ , вообще говоря, не влечет (35). Если  $\tau_0 > 0$ , то

$$\int_{\delta}^{\tau_0} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} = \infty \quad \forall \delta \in [0, \tau_0). \quad (39)$$

Однако соотношение (39) не несет никакой информации собственно о функции  $Q(x)$ , и, следовательно, условие (37) при  $\delta < \Phi(0)$  ни в каком случае не может влечь (36).

В силу соотношения (37) *доказательство теоремы 5* сводится к утверждению леммы 1.

## §4. Достаточные условия равностепенной непрерывности

**Доказательство теоремы 1.** Без ограничения общности можно считать, что  $\Phi(0) > 0$ . Ввиду предложения 3 достаточно показать, что условия теоремы 1 влекут выполнение соотношения вида (12) при каждом  $x_0 \in D$  и некотором  $\varepsilon_0 < \text{dist}(x_0, \partial D)$ . Делая замену  $t = r/\varepsilon_0$ , получаем

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \int_{\varepsilon/\varepsilon_0}^1 \frac{dt}{t q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t\varepsilon_0)} = \int_{\varepsilon/\varepsilon_0}^1 \frac{dt}{t \tilde{q}_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}, \quad (40)$$

где  $\tilde{q}_0(t)$  — среднее интегральное значение функции  $\tilde{Q}(x) := Q(\varepsilon_0 x + x_0)$  над сферой  $|x| = t$ , которое определено в соотношении (11). Применяя теперь лемму 1 при  $p = n - 1$ , получаем

$$\int_{\varepsilon/\varepsilon_0}^1 \frac{dt}{t \tilde{q}_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} \geq \frac{1}{n} \int_{e M_*(\varepsilon/\varepsilon_0)}^{\frac{M_*(\varepsilon/\varepsilon_0)\varepsilon_0^n}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}}, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} M_*(\varepsilon/\varepsilon_0) &= \frac{1}{\Omega_n (1 - (\varepsilon/\varepsilon_0)^n)} \int_{A(\varepsilon/\varepsilon_0, 1, 0)} \Phi(Q(\varepsilon_0 x + x_0)) dm(x) \\ &= \frac{1}{\Omega_n (\varepsilon_0^n - \varepsilon^n)} \int_{A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)} \Phi(Q(x)) dm(x). \end{aligned} \quad (42)$$

Заметим, что при всех  $x \in A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)$  выполнено  $|x| \leq |x - x_0| + |x_0| \leq \varepsilon_0 + |x_0|$ , поэтому из (42) следует, что

$$M_*(\varepsilon/\varepsilon_0) \leq \frac{\beta_n(x_0)}{\Omega_n (\varepsilon_0^n - \varepsilon^n)} \int_{A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)} \Phi(Q(x)) \frac{dm(x)}{(1 + |x|^2)^n},$$

где  $\beta_n(x_0) = (1 + (\varepsilon + |x_0|)^2)^n$ . Следовательно, при  $\varepsilon \leq 1/\sqrt[n]{\varepsilon_0^n - 1/2}$

$$M_*(\varepsilon/\varepsilon_0) \leq \frac{2\beta_n(x_0)}{\Omega_n} M,$$

где  $M$  — постоянная в правой части соотношения (8). Кроме того, заметим, что

$$M_*(\varepsilon/\varepsilon_0) > \Phi(0) > 0.$$

Тогда из соотношений (40) и (41) получаем

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{\frac{2\varepsilon \beta_n(x_0)M}{\Omega_n}}^{\frac{\Phi(0)\varepsilon_0^n}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Однако правая часть последнего соотношения стремится к бесконечности в силу соотношения (7), откуда следует, что  $\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \infty$ . Нужное заключение следует теперь из предложения 3. Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 1.** Каждое из условий (15)–(20) при  $p \in (0, n-1]$  влечет равностепенную непрерывность и нормальность класса  $\mathfrak{R}_{M,E}^{\Phi,Q}$  для всех  $M \in (0, \infty)$ .

#### §5. Достаточные условия, обеспечивающие устранение особенностей отображений

**Доказательство теоремы 2** вполне аналогично доказательству теоремы 1, а именно опирается на установление расходимости интеграла  $\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}$ , а потом на предложение 2.  $\square$

Для отображения  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  множества  $E \subset D$  и точки  $y \in \mathbb{R}^n$  определим функцию кратности  $N(y, f, E)$  как число прообразов  $y$  во множестве  $E$ , т.е.

$$N(y, f, E) = \text{card} \{x \in E : f(x) = y\}.$$

**Следствие 2** (теорема типа Сохоцкого–Вейерштрасса). Пусть  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  — неубывающая выпуклая функция. Предположим, что для некоторого  $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$  выполнено условие вида (7) и что открытое дискретное  $Q$ -отображение  $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  имеет существенно особую точку  $x_0 \in D$ . Пусть функция  $Q$  удовлетворяет условию вида (8) в области  $D$  и, кроме того,  $Q(x) \geq 1$  почти всюду. Тогда существует множество  $C \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  типа  $F_\sigma$  в  $\overline{\mathbb{R}^n}$  емкости нуль такое, что

$$N(y, f, U \setminus \{x_0\}) = \infty$$

для любой окрестности  $U$  точки  $x_0$  и для всех  $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$ .

**Доказательство.** Пусть  $U$  — произвольная окрестность точки  $x_0$ . Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что  $x_0 = 0$  и  $U = \mathbb{B}^n$ .



Рассмотрим множества  $V_k = B(0, 1/k) \setminus \{0\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Полагаем

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k). \quad (43)$$

По теореме 2 каждое из множеств  $B_k := \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k)$  в объединении правой части соотношения (43) имеет емкость нуль. Тогда  $C$  также имеет емкость нуль, см., например, [7, с. 126]. Фиксируем  $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$ . Тогда

$$y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(V_k). \quad (44)$$

Из (44) вытекает существование последовательности  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  такой, что  $x_i \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$  и  $f(x_i) = y$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Следствие 2 доказано.  $\square$

**Следствие 3** (теорема типа Лиувилля). Пусть  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  — неубывающая выпуклая функция. Предположим, что для некоторого  $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$  выполнено условие вида (7) и что  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  — открытое дискретное  $Q$ -отображение в точке  $x_0 = \infty$ , т.е. отображение  $\tilde{f} := f \circ \varphi$ , где  $\varphi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ , является кольцевым  $Q'(x)$ -отображением в нуле, где  $Q'(x) = Q(\frac{x}{|x|^2})$ . Предположим, что функция  $Q$  удовлетворяет условию вида (8) в области  $D = \mathbb{R}^n$  и, кроме того,  $Q(x) \geq 1$  почти всюду. Тогда  $\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{R}^n)) = 0$ . В частности,  $f$  не может отображать все  $\mathbb{R}^n$  на ограниченную область.

**Доказательство.** Предположим противное, а именно что

$$\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{R}^n)) > 0.$$

Тогда для вспомогательного отображения  $\tilde{f} = f(\frac{x}{|x|^2})$ ,  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ , имеем  $\tilde{f}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = f(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , поэтому

$$\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \tilde{f}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})) = \text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})) \geq \text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{R}^n)) > 0.$$

Кроме того, заметим, что отображение  $\varphi(x) = \frac{x}{|x|^2}$  подобно отображает сферу  $S(0, r)$  на сферу  $S(0, 1/r)$ , откуда следует, что  $|J(x, \psi)| = (1/|x|)^{2n}$ . Согласно сказанному, прибегая к замене переменной в интеграле и из (8), будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} Q'(x) \frac{dm(x)}{(1 + |x|^2)^n} &= \int_{\mathbb{R}^n} Q\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \frac{dm(x)}{(1 + |x|^2)^n} = \int_{\mathbb{R}^n} Q(y) \cdot \frac{1}{|y|^{2n}} \cdot \frac{dm(y)}{\left(1 + \frac{1}{|y|^2}\right)^n} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} Q(y) \frac{dm(y)}{(1 + |y|^2)^n} \leq M. \end{aligned}$$

В таком случае, в силу теоремы 2, отображение  $\tilde{f}$  продолжается по непрерывности до открытого дискретного отображения  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ . Это равносильно тому, что  $f$  также продолжается по непрерывности до открытого дискретного отображения  $\bar{f} : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ . В таком случае множество  $\bar{f}(\overline{\mathbb{R}^n})$  одновременно открыто и замкнуто в  $\overline{\mathbb{R}^n}$ , откуда следует, что  $\bar{f}(\overline{\mathbb{R}^n}) = \overline{\mathbb{R}^n}$ . Однако последнее противоречит сделанному выше предположению, что  $\text{сар}(\mathbb{R}^n \setminus \bar{f}(\mathbb{R}^n)) > 0$ .  $\square$

## §6. О точках ветвления отображений с интегральными ограничениями на характеристику

Напомним, что  $y_0 \in D$  — точка ветвления отображения  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , если ни в одной окрестности  $U$  точки  $y_0$  сужение отображения  $f|_U$  не является гомеоморфизмом. Совокупность всех точек ветвления  $f$  принято обозначать  $B_f$ . Будем говорить, что точка  $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$  является *асимптотическим пределом* отображения  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  в точке  $b \in \partial D$ , если найдется кривая  $\alpha : [0, 1) \rightarrow D$ ,  $\alpha(t) \rightarrow b$  при  $t \rightarrow 1$  такая, что  $f(\alpha(t)) \rightarrow z_0$  при  $t \rightarrow 1$ , см. §2 гл. VII в [17]. Грубо говоря, отображение  $f$ , заданное в области  $D$ , имеет своим асимптотическим пределом величину  $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$  в некоторой точке  $b$  границы  $D$ , если существует кривая, лежащая в  $D$  и стремящаяся к  $b$ , вдоль которой отображение  $f$  стремится к  $z_0$ . Настоящая секция представляет собой некоторое количество следствий из следующего утверждения, доказанного автором ранее, см. теорему 1 в работе [26].

**Предложение 5.** Пусть  $x_0 \in D$ ,  $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ ,  $n \geq 2$ , — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношению (4) в точке  $x_0$  для любой измеримой функции  $\eta$ , удовлетворяющей (6) и некоторой измеримой функции  $Q(x)$ ,  $Q : D \rightarrow [1, \infty]$ ,  $x_0$  — существенно особая точка  $f$ . Предположим, что при некотором  $\delta(x_0) > 0$ ,  $\delta(x_0) < \text{dist}(x_0, \partial D)$  выполнено условие вида (12). Тогда

I. Если  $n \geq 3$  и точка  $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$  является асимптотическим пределом  $f$  в точке  $x_0$ , то для любой окрестности  $U \subset D$ , содержащей точку  $x_0$ , выполнено  $z_0 \in \overline{f(B_f \cap U)}$ .

II. Каждая точка множества  $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})$  является асимптотическим пределом  $f$  в точке  $x_0$ .

III. Если  $n \geq 3$ , то имеет место включение  $(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{x_0\})) \subset \overline{f(B_f)}$ .

IV. Если  $n \geq 3$  и  $\infty \notin f(D \setminus \{x_0\})$ , то

- a) множество  $f(B_f)$  неограничено в  $\mathbb{R}^n$ ,
- b)  $x_0 \in \overline{B_f}$ .

Справедлива следующая

**Теорема 6.** Пусть  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  — неубывающая выпуклая функция. Предположим, что для некоторого  $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$  выполнено условие вида (7) и что открытое дискретное  $Q$ -отображение  $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  имеет существенно особую точку  $x_0 \in D$ . Пусть функция  $Q$  удовлетворяет условию вида (8) в области  $D$  и, кроме того,  $Q(x) \geq 1$  почти всюду. Тогда выполнено каждое из заключений I–IV предложения 5.

**Доказательство.** Как и при доказательстве теоремы 1, вначале мы устанавливаем расходимость интеграла  $\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{n-1}{n}}(r)}$  в (12), затем на основании предложения 5 получаем требуемое заключение.  $\square$

**Следствие 4.** Пусть  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  — неубывающая выпуклая функция. Предположим, что для некоторого  $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$  выполнено условие вида (7), что  $Q$ -отображение  $f : D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  является локальным гомеоморфизмом в области  $D \setminus \{x_0\}$ , что функция  $Q$  удовлетворяет условию вида (8) в  $D$  и, кроме того,  $Q(x) \geq 1$  почти всюду. Тогда  $f$  продолжается до локального гомеоморфизма  $\bar{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Доказательство следствия 4** легко вытекает из теоремы 6. Возможность непрерывного продолжения  $f$  в точку  $x_0$  следует из условия  $B_f = \emptyset$ . Остается показать, что продолженное отображение  $\bar{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  является гомеоморфизмом в некотором шаре  $B(x_0, \varepsilon_1)$ . Предположим противное, тогда  $x_0 \in B_{\bar{f}}$ . С другой стороны, для произвольного открытого дискретного отображения  $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  области  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , хаусдорфова размерность  $\dim_H g(B_g) \geq n - 2$ , см., например, предложение 5.3 гл. III в [17]. В нашем случае это означало бы, что в области  $D$ , по крайней мере, были бы еще какие-то точки множества  $B_{\bar{f}}$ , кроме точки  $x_0$ , что противоречит сделанному предположению о локальной гомеоморфности  $f$  в  $D \setminus \{x_0\}$ .  $\square$

## §7. Необходимые условия равностепенной непрерывности и устранения особенностей

Перед доказательством теоремы 3 сделаем следующее

**Замечание 6.** Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что в определении класса  $\mathfrak{R}_{M,E}^{\Phi,Q}$ , в формулировке теоремы 3, измеримая функция  $Q(x)$ , связанная с  $\Phi$  соотношением (8), больше либо равна 1.

Заметим также, что функция  $\Phi(t)$  в теореме 3 не может быть постоянной, ибо в противном случае никаких ограничений на  $Q$  в указанной

выше теореме не возникает. Исключение составляет только лишь условие  $\Phi(t) \equiv \infty$ , когда соответствующий класс  $\mathfrak{R}_{M,E}^\Phi$  пуст. Более того, согласно известному критерию выпуклости, см., например, предложение 5 в I.4.3 в [4], наклонение  $[\Phi(t) - \Phi(0)]/t$  является неубывающей функцией. Поэтому доказательство теоремы 3 сводится к следующему утверждению.

**Лемма 2.** Пусть функция  $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  не убывает и

$$\Phi(t) \geq C \cdot t^{\frac{1}{n-1}} \quad \forall t \in [T, \infty] \quad (45)$$

для некоторых  $C > 0$  и  $T \in (0, \infty)$ . Если класс  $\mathfrak{R}_{M,E}^{\Phi,Q}$  является равномерно непрерывным (нормальным) для всех  $M \in (0, \infty)$ , всех множеств  $E$  положительной емкости и всех измеримых по Лебегу функций  $Q$ , то (9) имеет место при всех  $\delta_* \in (\tau_0, \infty)$ , где  $\tau_0 := \Phi(+0)$ .

**Доказательство.** Достаточно рассмотреть случай  $D = \mathbb{B}^n$ . Предположим противное, а именно, что соотношение (9) не выполнено, т.е.

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_{n-1}^{-1}(\tau)} < \infty \quad (46)$$

для некоторого  $\delta_0 \in (\tau_0, \infty)$ , где  $\Phi_{n-1}(t) := \Phi(t^{n-1})$ . Тогда также

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_{n-1}^{-1}(\tau)} < \infty \quad \forall \delta \in (\tau_0, \infty), \quad (47)$$

поскольку  $\Phi^{-1}(\tau) > 0$  для всех  $\tau > \tau_0$ , и функция  $\Phi^{-1}(\tau)$  не убывает. Заметим, что по условию (45) выполняется неравенство  $\Phi_{n-1}(t) \geq C \cdot t$ ,  $\forall t \geq T$ , и при некоторых  $C > 0$  и  $T \in (1, \infty)$ . Более того, применяя линейное преобразование  $\alpha\Phi + \beta$ , где  $\alpha = 1/C$  и  $\beta = T$ , см., например, (17), мы можем считать, что

$$\Phi_{n-1}(t) \geq t \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (48)$$

Конечно же, мы можем также предполагать, что  $\Phi(t) = t$  при всех  $t \in [0, 1)$ , поскольку значения функции  $\Phi$  на полуинтервале  $[0, 1)$  не несут в себе информации относительно  $Q(x) \geq 1$  в (8). Ясно, что соотношение (47) влечет условие  $\Phi(t) < \infty$  при всех  $t < \infty$ , см. критерий (17), см. также (20). Теперь заметим, что функция  $\Psi(t) := t\Phi_{n-1}(t)$  строго возрастает,  $\Psi(1) = \Phi(1)$  и  $\Psi(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Поэтому функциональное уравнение

$$\Psi(K(r)) = \left(\frac{\gamma}{r}\right)^2 \quad \forall r \in (0, 1], \quad (49)$$

где  $\gamma = \Phi^{1/2}(1) \geq 1$ , разрешимо с  $K(1) = 1$  и строго убывающей непрерывной функцией  $K(r)$  такой, что  $K(r) < \infty$ ,  $r \in (0, 1]$ , и  $K(r) \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ . Взяв логарифм в (49), имеем, что  $\log K(r) + \log \Phi_{n-1}(K(r)) = 2 \log \frac{\gamma}{r}$ , и ввиду (48) получаем, что  $\log K(r) \leq \log \frac{\gamma}{r}$ , т.е.

$$K(r) \leq \frac{\gamma}{r}. \quad (50)$$

Тогда в силу (49),  $\Phi_{n-1}(K(r)) \geq \frac{\gamma}{r}$  и по (14)

$$K(r) \geq \Phi_{n-1}^{-1}\left(\frac{\gamma}{r}\right). \quad (51)$$

Определим следующие отображения в проколотом единичном шаре  $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ :

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \rho(|x|), \quad f_m(x) = \frac{x}{|x|} \rho_m(|x|), \quad m = 1, 2, \dots,$$

где  $\rho(t) = \exp\{I(0) - I(t)\}$ ,  $\rho_m(t) = \exp\{I(0) - I_m(t)\}$ ,  $t \in [0, 1]$ ,

$$I(t) = \int_t^1 \frac{dr}{rK(r)}, \quad I_m(t) = \int_t^1 \frac{dr}{rK_m(r)}$$

и

$$K_m(r) = \begin{cases} K(r) & \text{при } r \geq 1/m, \\ K\left(\frac{1}{m}\right) & \text{при } r \in (0, 1/m). \end{cases}$$

Из (51) получаем

$$I(0) - I(t) = \int_0^t \frac{dr}{rK(r)} \leq \int_0^t \frac{dr}{r\Phi_{n-1}^{-1}\left(\frac{\gamma}{r}\right)} = \int_{\frac{\gamma}{t}}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi_{n-1}^{-1}(\tau)} \quad \forall t \in (0, 1],$$

где  $\gamma/t \geq \gamma \geq 1 > \Phi(0) = 0$ . Поэтому ввиду (47)

$$I(0) - I(t) \leq I(0) = \int_0^1 \frac{dr}{rK(r)} < \infty \quad \forall t \in (0, 1]. \quad (52)$$

Кроме того,  $f_m$  и  $f \in C^1(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$ , поскольку  $K_m(r)$  и  $K(r)$  непрерывны. Покажем, что  $f_m$  являются  $K_m$ -квазиконформными в  $\mathbb{B}^n$ , где  $K_m = K^{n-1}(1/m)$ ,  $f_m(0) = 0$ .

Зафиксируем произвольно  $\rho \in (0, 1)$  и элемент  $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$  такой, что  $|x| = \rho$ . Заметим, что главные растяжения  $\lambda_{i_1}(x), \dots, \lambda_{i_{n-1}}(x)$  отображения  $f$  в точке  $x$  в  $n-1$  касательных направлениях  $i_1, \dots, i_{n-1}$  к сфере

$|x| = \rho$  одинаковы и вычисляются, как

$$\lambda_{i_k}(x) := \delta_\tau(x) = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{\exp \left\{ \int_0^\rho \frac{dr}{rK(r)} \right\}}{\rho}, \quad (53)$$

$k = 1, \dots, n-1$ , а одно значение  $\lambda_{i_n}(x)$ , соответствующее перпендикулярному (радиальному) направлению, вычисляется, как

$$\lambda_{i_n}(x) := \delta_r(x) = \frac{\partial |f(x)|}{\partial |x|} = \frac{\exp \left\{ \int_0^\rho \frac{dr}{rK(r)} \right\}}{\rho K(\rho)}. \quad (54)$$

Более подробно по поводу вычисления и определения растяжений см., например, §5 гл. I в [16], а также предложение 6.3 гл. VI в [11]. Из соотношений (53) и (54) следует, что  $\delta_r(x) \leq \delta_\tau(x)$ , поскольку  $K(r) \geq 1$ . Следовательно, на основании соотношения (10) мы имеем, что

$$K_I(x, f) = \frac{\delta_\tau^{n-1}(x) \cdot \delta_r(x)}{\delta_r^n(x)} = K^{n-1}(|x|)$$

во всех точках  $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ , см. также §I.2.1 в [16]. Заметим, что

$$f_m(x) \equiv f(x) \quad \forall x: \frac{1}{m} < |x| < 1, \quad m = 1, 2, \dots \quad (55)$$

Поэтому аналогично вычисляются  $K_I(x, f_m) = K_I(x, f) = K^{n-1}(|x|)$  для  $\frac{1}{m} < |x| < 1$  и  $K_I(x, f_m) = K^{n-1}(1/m)$  для  $0 < |x| < \frac{1}{m}$ . Таким образом,  $f_m$  являются квазиконформными в  $\mathbb{B}^n$ , поэтому  $f_m \in W_{loc}^{1,n}$  и по предложению 1 каждое  $f_m$  является кольцевым  $Q$ -отображением в  $\mathbb{B}^n$  при  $Q(x) = K_I(x, f)$  с учетом того, что  $K(r)$  не возрастает. Ввиду (49)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}^n} \Phi(K_I(x, f_m)) \, dm(x) &\leq \int_{\mathbb{B}^n} \Phi_{n-1}(K(|x|)) \, dm(x) \\ &= \omega_{n-1} \int_0^1 \frac{\Psi(K(r))}{rK(r)} \cdot r^n dr \leq \gamma^2 \omega_{n-1} \int_0^1 \frac{dr}{rK(r)} \\ &\leq M := \gamma^2 \omega_{n-1} I(0) < \infty. \end{aligned} \quad (56)$$

Заметим, что отображения  $f_m$  отображают единичный шар  $\mathbb{B}^n$  на шар с центром в начале координат и радиуса  $R = e^{I(0)} < \infty$ . Таким образом,  $f_m \in \mathfrak{R}_{M,E}^{\Phi,Q}$ , где  $M$  указано выше, а в качестве  $E$  можно взять  $E = \overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0, e^{I(0)})$ . С другой стороны, легко видеть, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) = e^0 = 1, \quad (57)$$

т.е.  $f$  отображает проколотый шар  $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$  на кольцо  $1 < |y| < R = e^{I(0)}$ . Тогда в силу (55) и (57) мы получаем, что

$$|f_m(x)| = |f(x)| \geq 1 \quad \forall x : |x| \geq 1/m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

т.е. семейство  $\{f_m\}_{m=1}^\infty$  не является равностепенно непрерывным в нуле. Полученное противоречие опровергает предположение (46).  $\square$

**Замечание 7.** Теорема 3 показывает, что условие (7) является не только достаточным, но и необходимым для равностепенной непрерывности (нормальности) классов отображений с интегральными ограничениями вида (8) при выпуклой неубывающей функции  $\Phi$ . Ввиду предложения 4 сказанное относится также к каждому из условий (15)–(20) при  $p = n - 1$ .

**Доказательство теоремы 4.** Используя конструкцию, рассмотренную при доказательстве теоремы 3 и леммы 2, и сохраняя использованные выше обозначения, рассмотрим в области  $D = \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$  отображение

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \rho(|x|).$$

Как уже было отмечено выше,  $f$  отображает проколотый шар  $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$  на кольцо  $1 < |y| < R = e^{I(0)}$ . Это и означает, что отображение  $f$  имеет неустранимую особенность в нуле. При этом, выше также было установлено, что отображение  $f$  является кольцевым  $Q$ -отображением в нуле при  $Q(x) = K_I(x, f) = K^{n-1}(|x|)$ , причем  $Q$  удовлетворяет соотношению (56), т.е.  $f \in K_{M,E}^{\Phi,Q}(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$  при некоторых  $M > 0$  и некотором множестве  $E$  таком, что  $\text{сар } E > 0$ .  $\square$

## §8. О приложениях результатов к классам Соболева

Предположим, отображение  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , имеет частные производные при почти всех  $x \in D$ . Тогда *внешней дилатацией* отображения  $f$  в точке  $x$  называется величина

$$K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x, f)|},$$

если  $J(x, f) \neq 0$ ,  $K_O(x, f) = 1$ , если  $f'(x) = 0$ , и  $K_O(x, f) = \infty$  в остальных точках. Можно показать, что при почти всех  $x \in D$ ,  $K_I(x, f) \leq K_O^{n-1}(x, f)$ ,  $K_O(x, f) \leq K_I^{n-1}(x, f)$ , см., например, §3 гл. I в [16]. Следующая теорема доказана ранее автором (см. [27, теорема 1]).

**Теорема 7.** Пусть  $x_0 \in D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  — открытое дискретное отображение класса  $W_{\text{loc}}^{1,n}(D)$ , для которого  $Q := K_O^{n-1}(x, f) \in L_{\text{loc}}^1(D)$  и  $t(B_f) = 0$ . Тогда  $f$  удовлетворяет соотношению (4) в точке  $x_0$  при каждой неотрицательной измеримой функции  $\eta$ , удовлетворяющей (6), и

вполне конкретном значении  $Q := K_O^{n-1}(x, f)$ . Допускается также случай, когда  $x_0$  — изолированная особая точка  $D$ .

Таким образом, все перечисленные результаты имеют приложение к классам Соболева и могут быть напрямую сформулированы для этих классов.

**Постскрипtum.** Настоящая работа выполнена в русле исследований, инициированных известным математиком Г. Д. Суворовым, считавшим „идеалом (и целью!) в теории функций достижение такой ситуации, когда мы будем располагать большим числом различных классов функций и для каждого класса иметь разработанный каталог свойств (метрических и топологических)“ (см. [21, с. 325]).

#### Список литературы

- [1] Альфорс Л., *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969.
- [2] Билута П. А., *Некоторые экстремальные задачи для отображений, квазиконформных в среднем*, Сиб. мат. ж. **6** (1965), №4, 717–726.
- [3] Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M., *On conformal dilatation in space*, Int. J. Math. Math. Sci. **2003**, no. 22, 1397–1420.
- [4] Bourbaki N., *Functions of a real variable*, Springer, Berlin, 2004.
- [5] Gehring F. W., *Rings and quasiconformal mappings in space*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 353–393.
- [6] Golberg A., *Homeomorphisms with finite mean dilatations*, Complex Analysis and Dynamical Systems II, Contemp. Math., vol. 382, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 177–186.
- [7] Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г., *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, Наука, М., 1983.
- [8] Кругликов В. И., *Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем*, Мат. сб. **130** (1986), №2, 185–206.
- [9] Крушкаль С. Л., *Об отображениях, квазиконформных в среднем*, Докл. АН СССР **157** (1964), №3, 517–519.
- [10] Lehto O., Virtanen K., *Quasiconformal mappings in the plane*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 126, Springer, New York etc., 1973.
- [11] Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E., *Moduli in modern mapping theory*, Springer, New York, 2009.



- [12] Миклюков В. М., *Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения*, ВолГУ, Волгоград, 2005.
- [13] Perović M., *Isolated singularity of the mean quasiconformal mappings*, Romanian-Finnish Seminar on Complex Analysis (Bucharest, 1976), Lecture Notes in Math., vol. 743, Springer, Berlin, 1979, pp. 212–214.
- [14] Песин И. Н., *Отображения, квазиконформные в среднем*, Докл. АН СССР **187** (1969), №4, 740–742.
- [15] Полецкий Е. А., *Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений*, Мат. сб. **83** (1970), №2, 261–272.
- [16] Решетняк Ю. Г., *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.
- [17] Rickman S., *Quasiregular mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), Bd. 26, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [18] Рязанов В. И., *Об отображениях, квазиконформных в среднем*, Сиб. мат. ж. **37** (1996), №2, 378–388.
- [19] Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E., *On integral conditions in the mapping theory*, Ukr. Mat. Visn. **7** (2010), no. 1, 73–87.
- [20] Стругов Ю. Ф., *О компактности семейств отображений, квазиконформных в среднем*, Докл. АН СССР **243** (1978), №4, 859–861.
- [21] Суворов Г. Д., *Об искусстве математического исследования*, Донецкая фирма наукоемких технологий НАН Украины (Фирма ТЕ-АН), Донецк, 1999.
- [22] Väisälä J., *Lectures on  $n$ -dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., vol. 229, Springer-Verlag, Berlin etc., 1971.
- [23] Ukhlov A., Vodopyanov S. K., *Mappings associated with weighted Sobolev spaces*, Complex Analysis and Dynamical Systems III, Contemp. Math., vol. 455, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 369–382.
- [24] Зорич В. А., *О допустимом порядке роста характеристики квазиконформности в теореме М. А. Лаврентьева*, Докл. АН СССР **181** (1968), №3, 530–533.
- [25] Севостьянов Е. А., *Об интегральной характеристике некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций*, Укр. мат. ж. **61** (2009), №10, 1367–1380.
- [26] Севостьянов Е. А., *О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности*, Сиб. мат. ж. **51** (2010), №5, 1129–1146.

- [27] Севостьянов Е. А., *Обобщение одной леммы Е. А. Полецкого на классы пространственных отображений*, Укр. мат. ж. **61** (2009), №7, 969–975.

Институт прикладной математики  
и механики НАН Украины  
83114, Донецк  
ул. Розы Люксембург, 74  
Украина  
*E-mail:* brusin2006@rambler.ru,  
esevostyanov2009@mail.ru

Поступило 25 ноября 2010 г.